

Zur Theorie der Teilchenverluste
eines Plasmas in toroidalen
Magnetfeldkonfigurationen

Hans-Peter Zehrfeld

1970

Zur Theorie der Teilchenverluste eines Plasmas
in toroidalen Magnetfeldkonfigurationen

Inaugural-Dissertation
zur Erlangung der Doktorwürde
der Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Ludwig-Maximilians-Universität München

vorgelegt von Hans-Peter Zehrfeld am 5. Juni 1969



1. Berichterstatter: Prof. Dr. A. Schlüter

2. Berichterstatter: Prof. Dr. F. Bopp

Tag der mündlichen Prüfung: 14.1.1970

Zusammenfassung

Auf der Grundlage von Gleichungen der Magnetohydrodynamik wird das Problem der Teilchenverluste eines Plasmas in toroidalen Gleichgewichtskonfigurationen untersucht.

In einem ersten Teil, in dem von Trägheitseffekten des Plasmas abgesehen und nur der Einfluß endlicher elektrischer Leitfähigkeit auf das Gleichgewichtsverhalten berücksichtigt wird, wird mit Hilfe differentialgeometrischer Methoden gezeigt, in welcher Weise die innergeometrischen Größen der das Magnetfeld tangierenden magnetischen Flächen den Plasma-verlustfluß bestimmen. Es wird ein exakter Ausdruck dafür abgeleitet. Als Spezialfälle werden axialsymmetrische Gleichgewichte und Gleichgewichte kleiner Rotationstransformation behandelt.

Der zweite Teil dieser Arbeit beschäftigt sich mit nichtlinearen Strömungen eines Plasmas niedriger Dichte in poloidalen Magnetfeldern. Zur Bestimmung des stationären Gleichgewichtes wird für ein bestimmtes System von hydromagnetischen Gleichungen ein Lösungsverfahren angegeben, das in bezug auf den Einfluß schwach dissipativer Effekte approximativ, bezüglich der Wirkung des nichtlinearen Trägheitsterms in der Bewegungsgleichung aber exakt ist. Das Problem der Bestimmung der Teilchenverluste wird reduziert auf die Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen.

Inhalt

Einführung	2
I. <u>Zur Theorie der klassischen Diffusion in toroidalen Systemen</u>	
1. Ein Koordinatensystem für toroidale Geometrie	5
2. Gleichgewicht und klassische Diffusion	10
3. Axialsymmetrische Gleichgewichte	21
4. Gleichgewichte kleiner Rotationstransformation	22
II. <u>Nichtlineare stationäre magnetohydrodynamische Strömungen eines Plasmas niedriger Dichte in axialsymmetrischen Meridionalfeldern</u>	
1. Diskussion der Ausgangsgleichungen	25
2. Das Lösungsverfahren	27
3. Interpretation der Lösbarkeitsbedingungen	33
4. Die Lösung in niedrigster Ordnung und die Bestimmung der Teilchenverluste	35
Literaturverweise	41

Einführung

Ein großer Teil der theoretischen und experimentellen Untersuchungen der Plasmaphysik befaßt sich mit den Möglichkeiten und Bedingungen einer Einschließung von Plasma in Magnetfeldern toroidaler Geometrie. Nahegelegt durch die Struktur der Gleichungen, die das stationär sich bewegende oder statische Plasma in hydromagnetischen Modellen beschreiben, handelt es sich dabei um Magnetfelder mit im Endlichen geschlossenen Tangentialflächen, deren Eigenschaft, toroidal, d.h. dem Kreistorus homöomorph zu sein, für ein stetiges, nirgends verschwindendes Magnetfeld dann topologisch notwendig wird [1].

Als Lösung der zugehörigen Gleichungen hat eine stationäre hydromagnetische Strömung bei Abwesenheit von dissipativen Effekten die Eigenschaft, daß sie ganz in solchen toroidalen, namentlich im Falle nicht geschlossener Feldlinien "magnetisch" genannten Flächen verläuft. Bei endlicher elektrischer Leitfähigkeit gilt dies nicht mehr, und die auftretende Normalkomponente des Strömungsfeldes führt im allgemeinen zu einem Teilchenverlust des toroidalen Einschlußbereiches, der für eine stationäre Lösung im Inneren durch Quellen gedeckt werden muß.

Diese Arbeit untersucht in zwei Modellen verschiedenen Näherungscharakters und unterschiedlichen Gültigkeitsbereiches diesen Teilchenverlust, dessen verursachender Mechanismus auch als "klassische Diffusion" bezeichnet wird.

Sieht man von Viskosität und von Wirkungen der Trägheit ab, so weist die Arbeit von Kruskal und Kulsrud [2] den Weg, wie im Prinzip vorzugehen ist, um bei im Gleichgewicht bekanntem Magnetfeld alle anderen den Gleichgewichtszustand kennzeichnenden Größen zu bestimmen. Es zeigt sich, daß bei gegebener Quellverteilung die hydromagnetischen Gleichungen die Gleichgewichtslösung bis auf zwei freie Funktionen des Druckes eindeutig festlegen. Die verbleibende Willkür entspricht der Überlagerung eines

überall zu den magnetischen Flächen tangentialen, divergenzfreien Geschwindigkeitsfeldes [3] und ist auf die Massenströmung durch die magnetischen Flächen ohne Einfluß, so daß die in diesem makroskopischen Modell erfaßten Teilchenverluste davon unberührt bleiben und eindeutig bestimmt sind. In Erkenntnis dessen haben kürzlich Johnson und von Goeler [4] für sie einen Ausdruck angegeben, den man erhält, indem man die zum Magnetfeld senkrechte Komponente der Stromdichte der Gleichgewichtsbedingung entnimmt, in die Gleichung $\text{div } \mathbf{j} = 0$ einsetzt, unter Berücksichtigung der Eindeutigkeit des elektrischen Potentials den Parallelstrom aus dieser Gleichung durch formale Integration längs einer Feldlinie auf einer irrationalen Fläche berechnet und schließlich - wie dies für die Ermittlung des Teilchenflusses erforderlich ist - das Quadrat der Stromdichte über diese Fläche integriert. Um also im letzten Schritt den Integranden für einen Flächenpunkt P zu bestimmen, sind im allgemeinen, beginnend bei einem beliebigen Punkt P_0 , Kurvenintegrale bis zu einem Punkt P^* zu erstrecken, der in Verfolg einer bei P_0 startenden Feldlinie in einer hinreichend kleinen Umgebung von P liegt.

Im ersten Teil dieser Arbeit wird auf einem mehr an der Geometrie des Magnetfeldes orientierten Wege eine systematische Behandlung des Problems gegeben. Es wird untersucht, wie die Diffusion durch rationale Flächen, auf denen die gerade beschriebene Prozedur versagt, erklärt ist: Ausgedrückt durch die Koordinaten des metrischen Tensors in einem vom Magnetfeld auf natürliche Weise erzeugten Koordinatensystem ergibt sich eine Beziehung von übersichtlicher Struktur. Durch Grenzübergang zu einer irrationalen Fläche kann man die von Johnson und Goeler angegebene Formel zurückgewinnen. Sehr einfach ist das Ergebnis für axialsymmetrische Gleichgewichte; es enthält schon bekannte Resultate (Johnson und von Goeler [4], Pfirsch und Schlüter [5]) als Spezialfälle. Für kleine Rotationstransformation wird ein Näherungsausdruck abgeleitet, der der Beziehung entspricht, die Schlüter für Klein- β -Gleichgewichte fand.

Der zweite Teil befaßt sich mit einem etwas ausgearteten Fall toroidaler Konfiguration: Ein Plasma niedriger Dichte befindet sich in einem axialsymmetrischen und meridionalen Magnetfeld. Anhand der Diskussion jüngerer Arbeiten über das Problem der Bestimmtheit stationärer Gleichgewichte wird ein System hydro-magnetischer Gleichungen und ein Verfahren zu seiner Lösung motiviert, das in bezug auf den Einfluß schwach dissipativer Effekte approximativ, bezüglich der Wirkung des nichtlinearen Trägheitsterms in der Bewegungsgleichung aber exakt ist.

Die Lösung in nullter Ordnung beschreibt stationäre ideale Strömungen des Plasmas in Abhängigkeit von fünf frei vorgebbaren Flächengrößen. Da sich die Bewegungsgleichung in dieser Ordnung als Eulersche Gleichung eines Lagrangeschen Variationsprinzips interpretieren läßt [7], ist der mit diesen Flächengrößen verbundene Grad an Unbestimmtheit nur natürlich: er steht in direktem Zusammenhang mit der Verfügbarkeit über physikalisch plausible Nebenbedingungen bei der Variation.

Wie in einigen Fällen statischer und quasistationärer Gleichgewichte [2,8], so hat auch in dem hier behandelten echt stationären Gleichgewicht der Übergang zur ersten Ordnung, der der Einführung schwacher Dissipation und schwacher Quellen entspricht, auf die allgemeine Lösung in nullter Ordnung restriktive Wirkung. Wir werden zeigen, daß die dafür verantwortlichen Lösbarkeitsbedingungen für "magnetische" Differentialgleichungen sich anschaulich mit der Erfüllung gewisser integraler Bilanzgleichungen in Verbindung bringen lassen und geeignet sind, die Lösung in nullter Ordnung überhaupt festzulegen. Es wird dies dazu führen, daß auch die durch die endliche Leitfähigkeit des Plasmas bedingten und von der Wirkung des Trägheitsterms in der Bewegungsgleichung beeinflussten Teilchenverluste im Prinzip bestimmt sind.

Herrn Prof. Dr. A. Schlüter bin ich für sein Interesse an dieser Arbeit und für Kritik sehr zu Dank verpflichtet. Den Herren Dr. B. Green, Dr. G. Spies und Dr. H. Tasso vom Institut für Plasmaphysik in Garching danke ich herzlich für viele Diskussionen.

I.

1. Ein Koordinatensystem für toroidale Geometrie

Zur Beschreibung toroidaler Magnetfeldkonfigurationen konstruieren wir ein krummliniges Koordinatensystem. Weil dabei notwendigerweise schon bekannte Dinge zur Sprache kommen, fassen wir uns entsprechend kurz.

Der Ortsvektor $\underline{x}$ und das Vektorfeld $\underline{B}$ mögen die zu $x = (x, y, z)$ und $B(x) = (B_x(x), B_y(x), B_z(x))$ zusammengefaßten kartesischen Koordinaten besitzen. Zu dem System gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$\frac{d\underline{x}}{d\sigma} = \underline{B}(\underline{x}) \quad (I.1)$$

gehört dann ein System von drei Lösungsfunktionen $P = (P_x, P_y, P_z)$ zum Anfangswert $\dot{\underline{x}} : \underline{x} = P(\dot{\underline{x}}, \sigma)$, $\dot{\underline{x}} = P(\dot{\underline{x}}, 0)$; vektoriell geschrieben

$$\underline{x} = \underline{P}(\dot{\underline{x}}, \sigma) \quad ; \quad \underline{P}_{|\sigma} := \frac{\partial \underline{P}}{\partial \sigma} = \underline{B}(\underline{P})$$

Wählt man die Werte von $\dot{\underline{x}}$ längs einer zum Feld $\underline{B}$ transversalen Fläche der Parameterdarstellung $\dot{\underline{x}}(\phi, \tau)$, also $\dot{\underline{x}} = \dot{\underline{x}}(\phi, \tau)$, dann wird

$$\begin{aligned} \underline{x} &= \underline{P}(\dot{\underline{x}}(\phi, \tau), \sigma) =: \underline{X}(\phi, \tau; \sigma) \\ \underline{X}(\phi, \tau, 0) &= \dot{\underline{x}}(\phi, \tau) \\ \underline{X}_{|\sigma} &= \underline{B}(\underline{X}) \end{aligned} \quad (I.2)$$

Das heißt, die Lösung von (I.1) und eine beliebige zu $\underline{B}$

transversale Anfangsfläche $\underline{X}(\phi, \tau)$ gestatten es, die kartesischen Koordinaten aller entlang Feldlinien erreichbaren Raumpunkte durch die Parameter ϕ , τ und σ auszudrücken. Die Gleichungen $x = X(\phi, \tau, \sigma)$ sind dort nach ϕ , τ und σ auflösbar, wo

$$\frac{\partial(X, Y, Z)}{\partial(\phi, \tau, \sigma)} = (\underline{X}_{|\phi} \times \underline{X}_{|\tau}) \cdot \underline{B} \neq 0 \quad (I.3)$$

Anschaulich bedeutet dies, daß die um σ längs der Feldlinien verschobene Anfangsfläche (ihre Normale zeigt in Richtung von $\underline{X}_{|\phi} \times \underline{X}_{|\tau}$) ebenfalls transversal zu $\underline{B}$ ist. Um den zum System (I.1) gehörigen Eindeutigkeitssatz nicht zu verletzen, muß mit eventueller Ausnahme einzelner Punkte (I.3) erfüllt sein. Die Anfangsfläche denken wir uns so orientiert, daß (I.3) positiven Vorzeichens und damit mit dem Volumenelement $\sqrt{g}$ identisch ist.

Die vermöge (I.3) mögliche Umkehrung der Gleichungen $x = X(\phi, \tau, \sigma)$ laute

$$\phi = \phi(x), \quad \tau = \tau(x), \quad \sigma = \sigma(x)$$

Es ist dann

$$\underline{X}_{|\sigma} \cdot \underline{B} = \sqrt{g} \nabla \phi \times \nabla \tau \quad (I.4)$$

Wegen $\text{div} \underline{B} = 0$ hat das $\underline{B} \cdot \nabla \sqrt{g} = 0$ zur Folge, so daß $\sqrt{g}$ nur von ϕ und τ abhängt.

Für das Weitere wird vom Vektorfeld $\underline{B}$ entsprechend den zu betrachtenden Magnetfeldkonfigurationen vorausgesetzt, daß auf der Anfangsfläche $\sigma(x) = 0$ eine Wahl der Flächenparameter in der Weise möglich ist, daß die Niveaulächen der Funktion $\phi(x)$ toroidal geschlossen sind. Wie in der Abbildung 1 auf der nächsten Seite skizziert, markiert die Fläche, die zum Wert ϕ der Funktion $\phi(x)$ gehört, auf den Flächen $\sigma(x) = \text{const.}$ geschlossene Kurven. Je nach dem Wert von σ ist ihre Parameterdarstellung $\underline{x} = \underline{X}(\phi, \tau, \sigma)$. Ihre Geschlossenheit drückt sich in

$$\underline{X}(\phi, \tau, \sigma) = \underline{X}(\phi, \tau + T(\phi), \sigma)$$

aus. Von σ kann ihre Periode $T(\Phi)$ wegen der Eindeutigkeit der Lösung von (I.1) nicht abhängen. Wenn Φ eine ordnungstreue Belegung der ineinandergeschachtelten Tangentialflächen des Feldes mit dem Wert 0 auf der "Achse" ist, dann beläuft sich der Fluß von $\underline{B}$ durch die Flächen $\sigma = \text{const.}$ auf

$$F(\Phi) = \int_0^{\Phi T(\Phi)} \int_0^{\Phi T(\Phi)} \underline{B} \cdot (\underline{X}_{|\Phi'} \times \underline{X}_{|\tau}) d\tau d\Phi' = \int_0^{\Phi T(\Phi)} \int_0^{\Phi T(\Phi)} \sqrt{g}(\Phi', \tau) d\tau d\Phi' \quad (\text{I.5})$$

Es ist leicht, nachzuprüfen: Nach der Koordinatentransformation

$$\begin{aligned} \hat{\Phi} &= \Phi \\ \hat{\tau} &= \hat{\tau}(\Phi, \tau) = \frac{1}{F'(\Phi)} \int_0^{\tau} \sqrt{g}(\Phi, \tau') d\tau' \\ \hat{\sigma} &= \sigma \end{aligned} \quad (\text{I.6})$$

gilt $\sqrt{\hat{g}} = F'(\Phi)$ und $\hat{X}(\Phi, \hat{\tau} + 1, \sigma) = \hat{X}(\Phi, \hat{\tau}, \sigma)$, wobei wir

$$X(\Phi, \tau(\Phi, \hat{\tau}), \sigma) =: \hat{X}(\Phi, \hat{\tau}, \sigma)$$

gesetzt haben. Es darf also ohne Einschränkung schon in den

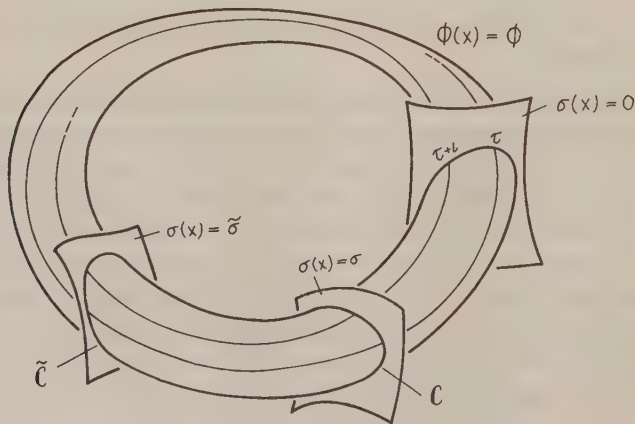


Abb.1

Koordinaten (ϕ, τ, σ) $\sqrt{g} = F'(\phi)$ und $T(\phi) \equiv 1$ angenommen werden.

In Abbildung 1 sei $\mathcal{C}$ die Schnittkurve der beiden Flächen $\phi(x) = \phi$ und $\sigma(x) = \sigma$. Eine Feldlinie, bei τ auf $\mathcal{C}$ startend, treffe nach einem toroidalen Umlauf bei $\tau + \iota$ wieder auf $\mathcal{C}$. Dabei durchlaufe der Feldlinienparameter das Intervall $[\sigma, \sigma + q]$. Es hängt dann ι höchstens von ϕ ab und q höchstens von ϕ und τ : Daß ι von σ nicht abhängen kann, geht aus der Konstruktion der Koordinaten hervor, denn Äquidistanz in τ wird für alle Kurven der Art von $\mathcal{C}$ durch Äquidistanz in τ auf der Anfangsfläche definiert. Um $q|_{\sigma} = 0$ zu zeigen, bestimmt man $\tilde{q}$ zu $\tilde{\mathcal{C}}$. Hier durchläuft σ das Intervall $[\tilde{\sigma}, \tilde{\sigma} + q]$ und es ist $\tilde{\sigma} + \tilde{q} = (\sigma + q) + (\tilde{\sigma} - \sigma)$, also gilt $q = \tilde{q}$ für beliebiges σ .

Schließlich berechnen wir $\iota|_{\tau}$. Nach Definition von ι und q ist

$$\underline{X}(\phi, \tau, \sigma + q(\phi, \tau)) = \underline{X}(\phi, \tau + \iota(\phi, \tau), \sigma) \quad (I.7)$$

Setzen wir für irgendeine Größe G , die bei den links bzw. rechts angegebenen Koordinatenwerten zu nehmen ist, G^* und G° , dann können wir anstelle von (I.7) $\underline{X}^* = \underline{X}^{\circ}$ schreiben. Für $\underline{B}$ ergeben die Gleichungen (I.2) und (I.7)

$$\underline{X}_{|\sigma}^* = \underline{B}(X^*) = \underline{B}(X^{\circ}) = \underline{X}_{|\sigma}^{\circ}$$

und das heißt $\underline{B}^* = \underline{B}^{\circ}$. Wir berücksichtigen dies bei einer Differentiation von (I.7) nach ϕ und τ und erhalten:

$$\underline{X}_{|\phi}^* + \underline{B}^{\circ} q_{|\phi} = \underline{X}_{|\phi}^{\circ} + \underline{X}_{|\tau}^{\circ} \iota_{|\phi} \quad (I.8)$$

$$\underline{X}_{|\tau}^* + \underline{B}^{\circ} q_{|\tau} = (1 + \iota_{|\tau}) \underline{X}_{|\tau}^{\circ} \quad (I.9)$$

Aus $\sqrt{g} = \underline{B} \cdot (\underline{X}_{|\phi} \times \underline{X}_{|\tau}) = F'(\phi)$ folgt $\sqrt{g}^* = \sqrt{g}^{\circ}$, aus (I.8) und (I.9) aber finden wir $\sqrt{g}^* = \sqrt{g}^{\circ} (1 + \iota_{|\tau})$, so daß $\iota_{|\tau} \equiv 0$ ist.

Als eine natürliche Wahl für den Scharparameter ϕ der magnetischen Flächen bietet sich der Fluß F an. Wir setzen also $\phi = F$ und fassen unsere Überlegungen wie folgt zusammen:

Der Zusammenhang zwischen den kartesischen Koordinaten $x = (x, y, z)$ und den Koordinaten (F, τ, σ) wird mit Hilfe der Lösungen des Differentialgleichungssystems (I.1) und einer beliebigen zu $\underline{B}$ transversalen Fläche durch die Funktionen $X = (X, Y, Z)$ beziehungsweise deren Umkehrung gestiftet,

$$x = X(F, \tau, \sigma) \quad (\text{I.10})$$

$$(F, \tau, \sigma) = (F(x), \tau(x), \sigma(x)) \quad (\text{I.11})$$

Die toroidale Geschlossenheit der Tangentialflächen des Feldes $\underline{B}$ drückt sich aus in der Existenz der Gleichungen

$$\underline{X}(F, \tau + l(F), \sigma) = \underline{X}(F, \tau, \sigma + q(F, \tau)) \quad (\text{I.12})$$

$$\underline{X}(F, \tau + 1, \sigma) = \underline{X}(F, \tau, \sigma) \quad (\text{I.13})$$

mit gewissen Funktionen $l(F)$ und $q(F, \tau)$. $\underline{B}$ genügt den Gleichungen

$$\underline{B} = \underline{X}_{|\sigma} = \nabla F \times \nabla \tau \quad (\text{I.14})$$

Durch partielle Differentiation der Beziehungen (I.12) erhält man in der im Anschluß zu (I.7) eingeführten Notation die folgenden Konsistenzrelationen

$$\begin{pmatrix} \underline{X}_{|F}^* \\ \underline{X}_{|\tau}^* \\ \underline{X}_{|\sigma}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & l_{|F} & -q_{|F} \\ 0 & 1 & -q_{|\tau} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{X}_{|F}^\circ \\ \underline{X}_{|\tau}^\circ \\ \underline{X}_{|\sigma}^\circ \end{pmatrix} \quad (\text{I.15})$$

Daraus ergibt sich für die Gradienten an F, τ und σ

$$\begin{pmatrix} \nabla F^* \\ \nabla \tau^* \\ \nabla \sigma^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -l_{|F} & 1 & 0 \\ (q_{|F} - l_{|F} q_{|\tau}) & q_{|\tau} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nabla F^\circ \\ \nabla \tau^\circ \\ \nabla \sigma^\circ \end{pmatrix} \quad (\text{I.16})$$

2. Gleichgewicht und klassische Diffusion

Gegenstand dieses Abschnittes sind solche hydromagnetischen Gleichgewichte, in denen das Magnetfeld $\underline{B}$, die Stromdichte $\underline{j}$, das elektrische Potential Φ und die Geschwindigkeit $\underline{v}$ die Gleichungen

$$\underline{j} \times \underline{B} = \nabla p \quad (I.17)$$

$$\underline{v} \times \underline{B} = \eta \underline{j} + \nabla \Phi \quad (I.18)$$

$$\operatorname{div} n \underline{v} = Q \quad (I.19)$$

$$\operatorname{rot} \underline{B} = \mu_0 \underline{j} \quad (I.20)$$

$$\operatorname{div} \underline{B} = 0 \quad (I.21)$$

so befriedigen, daß sich die Niveaulächen des Drucks als vom Typ der im vorigen Abschnitt betrachteten toroidal geschlossenen Flächen erweisen. Q ist eine gegebene Quellverteilung und η der elektrische Widerstand. Als Zustandsgleichung nehmen wir $p = 2nkT$ und wir werden $T = \text{const.}$ voraussetzen.

Die Flüsse von $\underline{B}$ und $\underline{j}$ durch eine zu $\underline{B}$ transversale und von $p(x) = p$ berandete Fläche werden mit F und I bezeichnet, die entsprechenden Querflüsse, die durch eine Fläche treten, deren Begrenzung von der magnetischen Achse und von einer auf $p(x) = p$ den großen Weg geschlossenen Kurve gebildet wird, mit G und J .

Diese Flüsse sind sowohl von der Form der zwei so gewählten Flächen, als auch von der Gestalt der beiden auf $p(x) = p$ gelegenen Randkurven unabhängig, weil zum einen $\underline{j}$ und $\underline{B}$ divergenzfrei sind und zum anderen nach (I.17) $\underline{j} \cdot \nabla p$ und $\underline{B} \cdot \nabla p$ Null ist. Aus diesem Grunde sind sie Funktionen des Druckes allein. Im Hinblick auf die Koordinatenwahl fassen wir vermittels $F = F(p)$ p , G , I und J als Funktionen von F auf.

Nach Kruskal und Kulsrud [2] existieren vermöge der hydromagnetischen Gleichungen und des Zusammenhangs im Großen zwischen den genannten Größen, der Rotationstransformation $2\pi\ell \pmod{2\pi}$; zugunsten von Anschaulichkeit nehmen wir an, daß sie kleiner als 2π ist) und der Größe

$$\bar{q}(F) := \int_0^1 q(F, \tau) d\tau = \frac{d}{dF} \int_{F(x) \leq F} d^3x \quad (I.22)$$

gewisse differentielle Beziehungen. Wir berufen uns hier auf die folgenden:

$$J' = p' \bar{q} + \ell I' \quad (I.23)$$

$$G' = \ell \quad (I.24)$$

$$Z_g I' + Z_k J' = 0 \quad (I.25)$$

$$\frac{d}{dF} \int_{F(x) \leq F} |\underline{B}|^2 d^3x = Z_g + \ell Z_k \quad (I.26)$$

Mit einem Strich bezeichnen wir die Ableitung nach F . Z_g und Z_k sind die über einen großen beziehungsweise kleinen Weg berechneten Zirkulationen von $\underline{B}$. Wird neben dem äußeren das von den Strömen im Plasma erzeugte Magnetfeld berücksichtigt, dann gelten zusätzlich die Gleichungen

$$Z_g = \mu_0 (J_A - J) \quad (I.27)$$

$$Z_k = \mu_0 I \quad (I.28)$$

mit J_A als dem von der magnetischen Achse umfaßten Strom. Die Trennung der Zirkulation des Magnetfeldes vom Strom im Plasma ist notwendig, weil wir auch den Fall kleinen β 's einbeziehen wollen, in dem anstelle der Gleichung (I.20) $\text{div } \underline{j} = 0$ und - im Bereich des Plasmas - $\text{rot } \underline{B} = 0$ zu benutzen sind.

Vom Standpunkt gegebener Quellverteilung Q aus ist auch der

Teilchenfluß W durch jede magnetische Fläche gegeben, weil nach (I.19)

$$W := \frac{p}{2kT} \int_{F(x)=F} \underline{v} \cdot d\underline{S} = \int_{F(x) \leq F} Q d^3x \quad (I.29)$$

ist. Wesentlich ist W jedoch im Zusammenhang mit der Druckverteilung und der Struktur des einschließenden Magnetfeldes. Zur Untersuchung dieses Zusammenhangs verwandeln wir das W definierende Integral in bekannter Weise [2] in ein Integral über das Stromdichtequadrat und suchen anschließend die Stromdichte über das Magnetfeld zu bestimmen.

Die Folge von Gleichungen

$$\underline{v} \cdot \nabla p = \underline{v} \cdot (\underline{j} \times \underline{B}) = -\underline{j} \cdot (\underline{v} \times \underline{B}) = -\eta j^2 - \operatorname{div}(\Phi \underline{j}) \quad (I.30)$$

erklärt sich aus den Bedingungen des Gleichgewichts. Ersetzen wir für $\underline{v} \cdot \nabla p$ in (I.29), dann nimmt W die Form

$$W = \frac{\eta p}{2kT} \int_{F(x)=F} |\underline{j}|^2 \frac{dS}{|\nabla p|} \quad (I.31)$$

an. Das elektrische Potential leistet wegen

$$\int_{F(x)=F} \operatorname{div}(\Phi \underline{j}) \frac{dS}{|\nabla F|} = \frac{d}{dF} \int_{F(x) \leq F} \operatorname{div}(\Phi \underline{j}) d^3x \quad (I.32)$$

und nach Verwandlung des letzten Ausdruckes in ein Oberflächenintegral deswegen keinen Beitrag, weil nach der Gleichgewichtsbedingung $\underline{j} \cdot \nabla p = p' \underline{j} \cdot \nabla F = 0$ ist und $\Phi \underline{j}$ ein räumlich eindeutiges Vektorfeld ist.

Für eine nähere Bestimmung der Stromdichte führen wir die Koordinaten F, τ und σ ein.

Mit

$$g_{\alpha\beta} = \underline{X}_{|\alpha} \cdot \underline{X}_{|\beta} \quad (I.33)$$

bezeichnen wir die Elemente des metrischen Tensors; α und β durchlaufen dabei die Zeichen F, τ und σ . Für ein Vektorfeld $\underline{A}$ verwenden wir die mathematisch natürlichen Darstellungen

$$\underline{A} = A^\alpha \underline{X}_{|\alpha} = A_\alpha \nabla \alpha \quad (I.34)$$

$$A_\alpha = \underline{A} \cdot \underline{X}_{|\alpha} \quad , \quad A^\alpha = \underline{A} \cdot \nabla \alpha \quad (I.35)$$

sind also die kovarianten beziehungsweise kontravarianten Komponenten von $\underline{A}$. Zwischen den lokalen Basisvektoren bestehen die Beziehungen

$$\underline{X}_{|\alpha} = \frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \nabla \beta \times \nabla \gamma \quad , \quad \nabla \alpha = \frac{1}{2} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} \underline{X}_{|\beta} \times \underline{X}_{|\gamma} \quad (I.36)$$

Wegen $\sqrt{g} \equiv 1$ reduziert sich $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$ und auch $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}$ auf das Permutationssymbol.

Eine Auswertung des Kreuzproduktes der Gleichgewichtsbedingung mit $\nabla \sigma$ ergibt für die Stromdichte

$$\underline{j} = p' \underline{X}_{|\tau} + j^\sigma \underline{X}_{|\sigma} \quad (I.37)$$

Diese ist also nach Maßgabe der Feldliniengeometrie bekannt, wenn wir j^σ , das wegen der Divergenzfreiheit von $\underline{j}$ Funktion höchstens von F und τ ist, im gleichen Sinne bestimmen können.

In der im Anschluß zu (I.7) erklärten Notation befriedigen $\underline{j}$ und $\nabla \sigma$ (vgl. (I.16)) die folgenden Konsistenzrelationen

$$\underline{j}^* = \underline{j}^\circ \quad (I.38)$$

$$\nabla \sigma^* = (q_{|F} - l_{|F} q_{|\tau}) \nabla F^\circ + q_{|\tau} \nabla \tau^\circ + \nabla \sigma^\circ \quad (I.39)$$

Da $j^\sigma = \underline{j} \cdot \nabla \sigma$ von σ unabhängig ist, folgt aus diesen beiden Gleichungen durch Berechnung von $(\underline{j} \cdot \nabla \sigma)^* = \underline{j}^* \cdot \nabla \sigma^* = \underline{j}^0 \cdot \nabla \sigma^*$

$$j^\sigma(F, \tau + l) - j^\sigma(F, \tau) = -p' q_{l\tau} \quad (I.40)$$

Bei Flächen $F(x) = F$, für die $\iota(F)$ rational ist, spricht man von rationalen Flächen. Sind m und n ganze Zahlen und dabei m die dem Betrage nach kleinste, mit der sich $\iota(F) = m/n$ erreichen läßt, dann sind alle Feldlinien auf $F(x) = F$ geschlossen und sie schließen sich erstmals nach m Umläufen den kleinen und n den großen Weg. Auf solchen Flächen führt die Differenzengleichung (I.40) nach n -maliger Fortsetzung in τ um ι auf die bekannte Bedingung, der toroidale Magnetfelder im Gleichgewicht genügen müssen: Die Größe

$$V' := \frac{1}{n} \oint \frac{dl}{B} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} q(\tau + k\iota) \quad (I.41)$$

muß unabhängig von τ , also Flächengröße sein. Aus diesem Grunde dann stimmt sie mit $\bar{q}$ überein, die Mittelwertbildung nämlich der rechten Seite von (I.41) ergibt wegen der Periodizität von q in τ gerade $\bar{q}$.

Auf irrationalen Flächen erklären wir V' durch einen Grenzübergang. Es sei $F(x) = F$ eine irrationale Fläche und $\{\iota_v = m_v/n_v\}$ ($v = 1, 2, \dots$) eine gegen $\iota(F)$ strebende Folge rationaler Zahlen teilerfremden Zählers und Nenners. Wir setzen die Funktion ι in einer geeigneten Umgebung des Wertes F als monoton voraus und erklären F_v mittels $\iota_v = \iota(F_v)$, setzen

$$V'(F) := \lim_{v \rightarrow \infty} V'(F_v) \quad (I.42)$$

und erhalten

$$\begin{aligned} V'(F) &= \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{1}{n_v} \sum_{k=0}^{n_v-1} q(F_v, \tau + k \frac{m_v}{n_v}) = \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{1}{n_v} \sum_{k=0}^{n_v-1} q(F_v, \tau + \frac{k}{n_v}) \\ &= \int_0^1 q(F, \tau + \tau') d\tau' = \bar{q}(F) \end{aligned}$$

Das Ergebnis des Grenzüberganges ist dabei ganz unabhängig davon, daß wir für die Existenz einer Gleichgewichtslösung Konstanz von V' auf rationalen Flächen fordern müssen und als Folge seiner Definition auf irrationalen Flächen ist V' als Funktion von F an allen den Stellen stetig, die irrationalen ι entsprechen.

Die Bedingung

$$\nabla F \times \nabla V' = 0 \quad (I.43)$$

auf rationalen Flächen läuft also auf eine Stetigkeitsforderung an V' bezüglich der Werte F hinaus, für die $\iota(F)$ rational ist, so daß man zusammenfassend sagen kann: V' ist genau dann im gesamten Variabilitätsbereich des Längsflusses zusammen mit $\bar{q}$ stetig und stimmt mit $\bar{q}$ überein, wenn (I.43) auf rationalen Flächen erfüllt ist.

Da wir die Teilchenverluste im Gleichgewicht bestimmen wollen, behandeln wir V' in diesem Sinne als stetige Flächengröße. Die Bezeichnung V' übrigens wird nahegelegt durch $V' = \bar{q}$ und durch die Gleichung (I.22): $\bar{q}$ ist die Ableitung des von einer magnetischen Fläche umschlossenen Volumens V nach dem magnetischen Fluß F .

Wir gehen jetzt an die Lösung der Differenzengleichung (I.40). Nach dem Vorbild von Newcomb [12], der "magnetische" Differentialgleichungen auf Gleichungen des Typs (I.40) zurückgeführt hat, bestimmen wir $j^\sigma(F, \tau) = j^\sigma(F, \tau + 1)$ in Gestalt einer Fourierreihe und setzen dazu q in der Form

$$q(F, \tau) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} q_\nu(F) e^{2\pi i \nu \tau} \quad (I.44)$$

an. Die Existenz von Lösungen verbürgt die Stetigkeit von V' . Unbestimmt bleiben natürlich jene Fourierkoeffizienten von j^σ , die die allgemeine Lösung h der zu (I.40) gehörigen homogenen Gleichung beschreiben. Die entsprechenden Reihenglieder nehmen wir von der Summierung aus (Σ') und erhalten als allgemeine Lösung

$$j^\sigma = -p' \sum_{\nu \neq 0} \frac{2\pi i \nu q_\nu}{e^{2\pi i \nu l} - 1} e^{2\pi i \nu \tau} + h \quad (I.45)$$

mit $h(F, \tau + \iota) = h(F, \tau)$. Auf irrationalen Flächen reduziert sich die Funktion h auf eine Konstante, weil sie in τ neben der Periode ι auch die Periode 1 besitzen muß. Wir können h hier leicht als eine schon bekannte Flächengröße identifizieren:

$$h = \overline{j^\sigma} = \int_0^1 \int \nabla \sigma \, d\tau = \frac{d}{dF} \int_{\substack{F(x) \leq F \\ \sigma(x) = \sigma}} j \cdot df = I' \quad (I.46)$$

Um zu zeigen, daß auf rationalen Flächen h nicht nur - wie es zunächst scheint - seinem Mittelwert nach, sondern auch als Funktion von τ eindeutig bestimmt ist, benützen wir die Aussage, die das Ohmsche Gesetz parallel zum Magnetfeld macht. Multipliziert man (I.18) innerlich mit $\underline{B}$ und ersetzt in der resultierenden Gleichung die Stromdichte durch die rechte Seite von (I.37), dann lautet das Ergebnis

$$\eta(p' g_{\tau\sigma} + B^2 j^\sigma) + \Phi_{,\sigma} = 0 \quad (I.45)$$

Wir integrieren diese Gleichung längs einer Feldlinie, die sich auf einer rationalen Fläche nach m Umläufen den kleinen und n den großen Weg zum ersten Male schließt. Wenn wir für eine solche Feldlinie, die nach (I.41) bezüglich des Parameters σ die "Länge" $n\bar{q}$ besitzt, den Mittelwert

$$\langle f \rangle := \frac{1}{n\bar{q}} \int_0^{n\bar{q}} f \, d\sigma = \frac{1}{n\bar{q}} \oint f \frac{dl}{B} \quad (I.46)$$

für irgendeine Funktion f definieren, dann ist insbesondere

$$\langle B^2 \rangle = \langle g_{\sigma\sigma} \rangle = \frac{1}{n\bar{q}} (n Z_g + m Z_k) = \frac{1}{\bar{q}} (Z_g + \iota Z_k) \quad (I.47)$$

Nun ist Φ eine eindeutige Funktion des Ortes und j^σ ist entlang einer Feldlinie konstant, also folgt aus (I.45)

$$j^\sigma = -p' \frac{\langle q_{\tau\sigma} \rangle}{\langle B^2 \rangle} = -\frac{J'}{Z_g} \langle q_{\tau\sigma} \rangle \quad (I.48)$$

Für die letzte Gleichheit wurde die erste jener beiden Gleichungen benützt, die man durch Auflösung von (I.23) und (I.25) nach J' und I' erhält:

$$J' = Z_g \frac{p' \bar{q}}{Z_{g+l} Z_k}, \quad I' = -Z_k \frac{p' \bar{q}}{Z_{g+l} Z_k} \quad (I.49)$$

(I.48) ist eine spezielle Lösung der Differenzengleichung (I.40). Aus (I.15) nämlich leitet sich die Beziehung

$$q_{\tau\sigma}(\tau, \sigma+l) = q_{\tau\sigma}(\tau+l, \sigma) - B^2(\tau+l, \sigma) q_{\tau\sigma} \quad (I.50)$$

ab und aus ihr folgt, daß wegen $V' = \bar{q}$ $g_{\tau\sigma}$ in σ periodisch zur Periode $n\bar{q}$ ist. Folglich wird

$$\langle q_{\tau\sigma} \rangle(\tau) = \langle q_{\tau\sigma} \rangle(\tau+l) - \langle B^2 \rangle q_{\tau\sigma} \quad (I.51)$$

und diesem Ergebnis läßt sich direkt ablesen, daß j^σ nach (I.48) der Differenzengleichung (I.40) genügt.

Es versteht sich, daß wir nur an Lösungen von (I.40) interessiert sind, die mit (I.48) konsistent sind. Deshalb legt (I.48) die bislang auf rationalen Flächen unbestimmte Funktion h fest, so daß j^σ (und damit auch die Stromdichte) nach Maßgabe der Feldliniengeometrie überall eindeutig bestimmt ist.

Wir hatten gesehen, daß für irrationales l (I.40) auf die Lösung

$$j^\sigma = -p' \sum_{v \neq 0} \frac{2\pi i v q_v}{e^{2\pi i v l} - 1} e^{2\pi i v \tau} + I' \quad (I.52)$$

führt. Gegen diesen Ausdruck offenbar strebt also die Darstellung (I.48), wenn wir den im Zusammenhang mit (I.42) besprochenen Grenzübergang vornehmen.

Zunächst jedoch berufen wir uns für die Berechnung des Teilchenverlustflusses auf rationale Flächen. Das Flächenelement lautet in unseren Koordinaten

$$d\underline{S} = \underline{X}_{1\tau} \times \underline{X}_{1\sigma} d\tau d\sigma = \nabla F d\tau d\sigma \quad (I.53)$$

Nach Definition der spitzen Klammern ist

$$\langle j^2 \rangle = \frac{1}{n\bar{q}} \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^{q(\tau+kl)} j^2(\tau+kl, \sigma) d\sigma \quad (I.55)$$

und das heißt

$$\overline{\langle j^2 \rangle} = \frac{1}{\bar{q}} \int_0^1 \int_0^{q(\tau)} j^2 d\tau d\sigma = \frac{1}{\bar{q}} \int_{F(x)=F} j^2 \frac{dS}{|\nabla F|} \quad (I.56)$$

Die Gleichungen (I.37) und (I.48) ergeben für $\underline{j}$

$$\underline{j} = p'(\underline{X}_{1\tau} - \frac{\langle q_{\tau\sigma} \rangle}{\langle B^2 \rangle} \underline{B}) \quad (I.57)$$

Damit berechnen wir den Mittelwert der linken Seite von (I.56) und erhalten schließlich für den Zusammenhang zwischen W , der Druckverteilung $p(F)$ und der Magnetfeldgeometrie in mathematisch symmetrischer Form die Gleichung

$$W = \frac{\eta p |p'| \bar{q}}{2kT \langle B^2 \rangle} \left\{ \overline{\langle q_{1\tau} \rangle \langle q_{\sigma\sigma} \rangle} - \overline{\langle q_{\tau\sigma} \rangle^2} \right\} \quad (I.58)$$

In dem vom toroidalen Magnetfeld auf natürliche Weise erzeugten Koordinatensystem sind also die über eine geschlossene Feldlinie integrierten Koordinaten des metrischen Tensors der Fläche ihrem Determinantenmittelwert nach proportional zum Fluß der diese Fläche passierenden Teilchen.

Für eine mehr konventionelle Formulierung des Ergebnisses beziehen wir uns auf die Abb.2 und führen ein: die Bogenlänge l einer Feldlinie, gerechnet von der Schnittkurve einer Meridianebene mit der Fläche $F(x)=F$, den Winkel φ um die magnetische

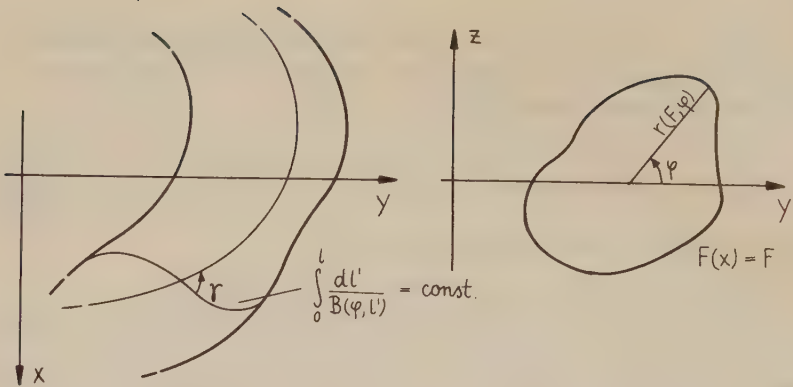


Abb.2

Achse in dieser Meridianebene und die Bogenlänge s einer Linie, für die - von der Meridianebene ab gerechnet - $\int dl/B$ auf $F(x) = F$ konstant ist. Wir fassen alle Größen als Funktionen von φ , l und F auf. Nach (I.1) und (I.6) sind σ und τ mit φ und l durch die Gleichungen

$$\sigma(l, \varphi) = \int_0^l \frac{dl'}{B(l', \varphi)}, \quad \tau(\varphi) = \int_0^\varphi \omega(\varphi') d\varphi' \quad (\text{I.59})$$

$$\omega := B_x r \frac{\partial r}{\partial F} \quad (\text{I.60})$$

verbunden. Längs einer die Bogenlänge s definierenden Kurve ist $ds = |\underline{x}_{| \tau}| d\tau$, so daß $ds/d\varphi$ über

$$\frac{ds}{d\varphi} = |\underline{x}_{| \tau}| \frac{d\tau}{d\varphi} = S_{1\varphi} - \frac{\sigma_{1\varphi}}{\sigma_{1l}} S_{1l} \quad (\text{I.61})$$

mit den Funktionen s und σ verknüpft ist. Für W erhalten wir dann

$$W = \frac{\eta p |p'|}{2kT} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\omega} \left\{ \frac{1}{n} \oint \left| \frac{ds}{d\varphi} \right|^2 \frac{dl}{B} - \frac{\left(\frac{1}{n} \oint \cos \gamma \frac{ds}{d\varphi} dl \right)^2}{Z_g + i Z_k} \right\} \quad (\text{I.62})$$

Wir wollen noch untersuchen, in welchem Zusammenhang die Gleichung (I.58) mit der Beziehung steht, die man direkt durch Integration von $\text{div } \underline{j} = 0$ auf irrationalen Flächen erhält [4].

Dazu bedienen wir uns wieder des Grenzüberganges $l(F_v) = m_v/n_v \rightarrow l(F)$, wobei $F(x) = F$ eine irrationale Fläche ist.

Für irgendeine längs Feldlinien definierte Größe G formen wir $\langle G \rangle$ wie folgt um

$$\langle G \rangle = \frac{1}{n_v \bar{q}} \int_0^{n_v \bar{q}} G \, d\sigma = \frac{1}{n_v \bar{q}} \sum_{k=0}^{n_v-1} \int_0^{q(\tau + k l_v)} G(\tau, \sigma + \sum_{\ell=0}^{k-1} q(\tau + \ell l_v)) \, d\sigma \quad (\text{I.63})$$

Für den Summenausdruck im Integranden im Falle $k=0$ ist Null zu setzen. Mit

$$\hat{G}(\tau + k l_v, \sigma) := G(\tau, \sigma + \sum_{\ell=0}^{k-1} q(\tau + \ell l_v)) \quad (\text{I.64})$$

(für eine eindeutige Funktion des Ortes ist $\hat{G} \equiv G$), erhalten wir nach Grenzübergang

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \langle G \rangle = \frac{1}{\bar{q}} \int_{F(x)=F} \hat{G} \frac{dS}{|\nabla F|} \quad (\text{I.65})$$

Aus $\nabla F \cdot \text{rot } \underline{B} = 0$ folgt $g_{\tau\sigma| \sigma} = B^2_{|\tau}$, deshalb ist

$$\left(\frac{g_{\tau\sigma}}{B^2} \right)_{|\sigma} = g_{\tau\sigma} \left(\frac{1}{B^2} \right)_{|\sigma} + \frac{1}{B^2} B^2_{|\tau} = (\nabla F \times \underline{B}) \cdot \nabla \frac{1}{B^2} \quad (\text{I.66})$$

und nach Integration längs einer Feldlinie erhalten wir

$$g_{\tau\sigma}(\tau, \sigma) = \frac{B^2(\tau, \sigma)}{B^2(\tau, 0)} g_{\tau\sigma}(\tau, 0) + B^2(\tau, \sigma) \int_0^\sigma (\nabla F \times \underline{B}) \cdot \nabla \frac{1}{B^2} \, d\sigma' \quad (\text{I.67})$$

Denkt man sich dies in

$$g^{\text{FF}} = |\nabla F|^2 = g_{\tau\tau} B^2 - g_{\tau\sigma}^2 \quad (\text{I.68})$$

eingesetzt, dann sieht man, daß auch $g_{\tau\tau}$ in expliziter Weise durch das Magnetfeld und ∇F ausgedrückt werden kann. Nach Ersetzung von $g_{\tau\sigma}$ und $g_{\tau\tau}$ in (I.58) und nach Grenzübergang ergibt sich der von Johnson und von Goeler [4] angegebene Ausdruck.

3. Axialsymmetrische Gleichgewichte

Für solche Gleichgewichte sind die Flächen $F(x) = F$ Rotationsflächen und die auf ihnen gelegenen Kreise um die Symmetriachse wollen wir als Symmetrielinien bezeichnen.

Es sei $\sigma = \Sigma(\theta, \tau)$ eine durch den Parameter θ gekennzeichnete Symmetrielinie. Ihr Ortsvektor in Abhängigkeit von θ und τ ist dann $\underline{X}(\tau, \Sigma(\theta, \tau)) =: \underline{Y}(\tau, \theta)$; τ ist Kurvenparameter. Bei festem θ sind $j_\sigma = \underline{j} \cdot \underline{B}$ und B^2 entlang $\underline{Y}$ konstant, $g_{\tau\sigma}$ wird auf $\underline{Y}$ durch

$$g_{\tau\sigma} = \underline{B} \cdot \underline{X}_{|\tau} = \underline{B} \cdot \underline{Y}_{|\tau} - B^2 \Sigma_{|\tau} \quad (\text{I.69})$$

beschrieben. Integrieren wir daher $j_\sigma(\tau, \Sigma(\theta, \tau))$ über das Intervall $[\tau+l, \tau]$, dann ist nach (I.37) und (I.69)

$$-l j_\sigma = p' \int_{\tau+l}^{\tau} \underline{B} \cdot \underline{Y}_{|\tau} d\tau' + B^2 \int_{\tau+l}^{\tau} j_\sigma d\tau' + p' B^2 (\Sigma(\tau+l) - \Sigma(\tau)) \quad (\text{I.70})$$

Das erste Glied stellt das Linienintegral von $\underline{B}$ über die zum Parameterwert θ gehörige Symmetrielinie dar. Die auf der rechten Seite stehende Differenz der Σ -Werte beträgt, wie man sich überlegen kann, $-q$. Über τ gemittelt und mit Rücksicht auf (I.23) und (I.46) folgt

$$\oint \cdot B = -\frac{1}{c}(p'Z_g - B^2J') \quad (I.72)$$

Mit $\underline{j}_\perp$ aus (I.17) ergibt dann die Auswertung von (I.31)

$$W = \frac{\eta p |p'|}{2kT} \left\{ \int_{F(x)=F} \frac{|\nabla F|^2}{B^2} \frac{dS}{|\nabla F|} + \frac{Z_g^2}{c^2} \left(\int_{F(x)=F} \frac{1}{B^2} \frac{dS}{|\nabla F|} - \frac{\bar{q}^2}{Z_g + cZ_k} \right) \right\}. \quad (I.73)$$

Enthalten als Spezialfälle sind darin die bekannten Ergebnisse für die Spherator- und für die Pfirsch-Schlüter-Magnetfeldkonfiguration. Für diese Modelle toroidaler Systeme gehen für $c \rightarrow 0$ die Magnetfeldlinien in Symmetrielinien über und aus diesem Grunde $B^2 q$ in Z_g , so daß für kleine Rotationstransformation

$$W \approx \frac{\eta p |p'|}{2kT} \frac{Z_g}{c^2} (\bar{q}^2 - q^2) \quad (I.74)$$

entsteht; ein Ergebnis, das sich unter bestimmten Voraussetzungen auch beim Fehlen axialer Symmetrie als gültig herausstellen wird.

4. Gleichgewichte kleiner Rotationstransformation

Wir entwickeln (I.52) bezüglich des explizit auftretenden c in eine Potenzreihe. Unter entsprechenden Voraussetzungen für die Konvergenz der dabei entstehenden Doppelreihe erhalten wir j^σ in der Form

$$j^\sigma = \frac{1}{c} (J' - p' \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{B_\mu}{\mu!} \frac{\partial^\mu q}{\partial c^\mu} c^\mu) \quad (I.75)$$

Die B_μ sind die Bernoullischen Zahlen als $B_\mu := \{z(e^z - 1)^{-1}\}^{(\mu)}(0)$.

Stellt man sich vor, in einem toroidalen System wäre die Geometrie der magnetischen Flächen über äußere Parameter in Abhängigkeit von der Rotationstransformation gegeben, dann würde über (I.75), (I.37) und (I.31) auch W als Funktional von ι bekannt sein und man könnte nach kleinem ι entwickeln. Jedoch auch ohne auf die Besonderheiten einer gerade zu betrachtenden Gleichgewichtskonfiguration einzugehen, läßt sich für Systeme vom Typ des Stellerators, in denen das äußere Magnetfeld die tragende Rolle spielt und magnetische Flächen existieren, angeben, was in bezug auf die Teilchenverluste das Resultat steter Verkleinerung der Rotationstransformation sein wird. Mit abnehmendem ι wird der Beitrag des dem Hauptfeld überlagerten helikalen Feldes zur Funktion q immer kleiner, während die magnetischen Flächen im wesentlichen ihre Form behalten. Für die im Stellerator benützten Grundfelder aber ist charakteristisch, daß die Flächen, für die $\oint dl/B$ konstant ist, im Endlichen toroidal nicht geschlossen sind. Es strebt also q_{τ} im Variabilitätsbereich von τ nicht gleichmäßig gegen Null und bei $\iota = 0$ ist toroidales Gleichgewicht nicht mehr möglich. Für j^{σ} erhalten wir

$$j^{\sigma} = \frac{1}{\iota} (J' - p'q) + O(1) = -\frac{p'}{\iota} (q - \bar{q}) + O(1) \quad (I.76)$$

Das Größenordnungssymbol bezieht sich auf den Grenzübergang $\iota \rightarrow 0$. Für W ergibt die Rechnung, für die man die Gleichungen (I.37), (I.31) und (I.53) benötigt,

$$W = \frac{\eta |p| |p'|}{2kT} \frac{Z_2}{\iota^2} (\bar{q}^2 - q^2) + O\left(\frac{1}{\iota}\right) \quad (I.77)$$

Dies entspricht dem Ergebnis, das Schlüter [6] für Klein- β -Gleichgewichte fand.

Wir fügen noch einige Bemerkungen über eine Verfeinerung des Resultates durch Angabe des Terms nächst höherer Ordnung an. Nimmt man für das Grundfeld ein Vakuummagnetfeld und berücksich-

tigt, daß die Elemente des metrischen Tensors einer magnetischen Fläche beim Grenzübergang endlich bleiben, dann erhält man für W die erweiterte Form

$$W = \frac{\eta p |p|}{2kT} \left\{ \frac{Z_g}{l^2} (\bar{q}^2 - \bar{q}^2) + \frac{2}{l} q_{| \tau} \overline{\int_0^{\tau} \int_0^{\sigma} B^2 d\sigma' d\sigma} \right\} + O(1) \quad (I.78)$$

wobei der Koeffizient von $1/l$ für das Grundfeld auszuwerten ist. Wie dies auch schon an (I.73) zu erkennen ist, gibt es bei axial-symmetrischem Hauptfeld keinen $1/l$ -Beitrag zur Diffusion, denn wegen $B^2 q = Z_g$ verschwindet der Mittelwert von

$$q_{| \tau} \int_0^q \int_0^{\sigma} B^2 d\sigma' d\sigma = q_{| \tau} \cdot \frac{Z_g}{q} \cdot \frac{1}{2} q^2 = \frac{1}{4} Z_g \frac{\partial q^2}{\partial \tau}$$

über τ identisch. Im allgemeinen Fall kommt man zum gleichen Schluß, falls

$$f := \int_0^q \int_0^{\sigma} B^2 d\sigma' d\sigma = \oint \frac{dl}{B} \int_0^l B dl' \quad (I.79)$$

nur über q von τ abhängt: $f(\tau) = \tilde{f}(q(\tau))$. Dann ist nämlich

$$\int_0^1 q_{| \tau} f d\tau = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial \tau} \left\{ \int_{q(\tau_*)}^{q(\tau)} \tilde{f}(q') dq' \right\} d\tau = 0 \quad (I.80)$$

II.

1. Diskussion der Ausgangsgleichungen

Solange man mit den bisher verwendeten hydromagnetischen Gleichungen befaßt ist, bestimmt, wie wir gesehen haben, jedes die Bedingungen toroidalen Gleichgewichtes befriedigende Magnetfeld bei gegebener Quellverteilung den Fluß von Plasma aus dem Einschlußbereich heraus eindeutig. Für die Plasmaflüsse den großen und kleinen Weg innerhalb jeder Fläche konstanten Druckes hingegen gilt das nicht: sie sind zumindest in dem Maße willkürlich, in dem die Vernachlässigung der Trägheitsterme in der Gleichgewichtsbedingung gerechtfertigt ist. Diese Unbestimmtheit in der Gleichgewichtslösung entspricht der in der Einführung genannten möglichen Überlagerung eines überall zu den magnetischen Flächen tangentialen, divergenzfreien Geschwindigkeitsfeldes. Es ist zu vermuten, daß eine zusätzliche Berücksichtigung von Effekten wie Trägheit und Viskosität diese Art von Entkopplung der Strömungen normal und tangential zu toroidalen Flächen aufhebt. Außer in Fällen, in denen man sowohl nach Trägheit als auch nach Viskosität entwickelt, stellt sich allerdings das Gleichgewichtsproblem dann in völlig veränderter Weise, weil der Begriff der magnetischen Fläche aufhört, eine ausgezeichnete Rolle zu spielen.

Zu übersehen sind indessen die Verhältnisse für ideale hydromagnetische Strömungen. Darunter wollen wir Strömungen verstehen, wie sie von den Gleichungen (I.17) bis (I.21) unter Zulassung des Trägheitsterms in der Gleichgewichtsbedingung bei unendlicher Leitfähigkeit beschrieben werden. Zur Vervollständigung des Gleichungssystems denken wir eine Beziehung hinzugefügt, die auf jeder magnetischen Fläche den Druck des Plasmas als eine Funktion nur der Teilchendichte kennzeichnet.

Solche Gleichungen haben Greene und Karlson [7] für die Aufstellung eines Lagrangeschen Variationsprinzips zugrundegelegt. Aus dem zugehörigen Ohmschen Gesetz folgt, daß die Niveaulflächen des elektrischen Potentials Φ Tangentialflächen sowohl des magnetischen als auch des Strömungsfeldes sind. Falls sie die Eigenschaften aufweisen, wie sie bisher von den Flächen konstanten Druckes verlangt wurden, dann sollte nach der Arbeit [7] zusammen mit Randbedingungen eine ideale hydromagnetische Strömung eindeutig definiert sein, wenn man die folgenden Größen vorschreibt: Auf jeder Potentialfläche des elektrischen Feldes einen bestimmten Wert der spezifischen Entropie oder der Temperatur und innerhalb jeder solchen die Längs- und Querflüsse von Magnetfeld $\underline{B}$ und Massenstromdichte $\rho \underline{v}$. Dies bedeutet einen hohen Grad an Willkür, von dem man sich vorstellen könnte, daß die Berücksichtigung von Mechanismen schwacher Dissipation ihn aufzuheben vermag. Um das zu prüfen, sind die Gleichungen für eine nahezu ideale Strömung nach kleinen Parametern, die den Einfluß dieser Mechanismen beschreiben, zu entwickeln.

Für Plasmen niedriger Dichte und mit Hilfe allerdings einer zusätzlichen Entwicklung nach Trägheit sind auf diese Weise Knorr [9], Karlson [8] und Viswanathan [10] verfahren; sie benützen das von Pfirsch und Schlüter [5] vorgeschlagene einfache toroidale axialsymmetrische Modellfeld.

Karlson untersucht bei kleiner Trägheit den Einfluß des elektrischen Widerstandes und der durch Stöße bedingten Viskosität, Viswanathan betrachtet ergänzend die Wirkung einer mit Gyroviskosität gemeinsam ins Spiel kommenden kleinen Druckanisotropie und stellt fest, daß dieser durch "konservative" Kräfte verursachte Effekt in bezug auf die Bestimmtheitsfrage stationärer Gleichgewichte ohne Bedeutung ist. Aus diesem Grunde und aus Gründen der Übersichtlichkeit werden wir die Möglichkeit einer Druckanisotropie nicht in Betracht ziehen. Ferner vernachlässigen wir jene Anteile des Hall-Terms im Ohmschen Gesetz, die daher rühren, daß die lokale Winkelgeschwindigkeit materieller Rotation nicht klein gegen die Gyrofrequenz ist. (Die berücksichtigten Anteile sind einem verallgemeinerten elektrischen Potential einbeschrieben.)

Die stationären hydromagnetischen Gleichungen eines isothermen Plasmas^{*)} mit der Zustandsgleichung $p = 2nkT = 2\varrho c_s^2$ lauten dann bei kleinem β ($\beta = \mu_0 p / B^2$) und bei Berücksichtigung von Viskosität und elektrischem Widerstand:

$$\varrho \underline{v} \cdot \nabla \underline{v} = \underline{j} \times \underline{B} - 2c_s^2 \nabla \varrho + \mu (\nabla^2 \underline{v} + \frac{1}{3} \nabla \operatorname{div} \underline{v}) \quad (\text{II.1})$$

$$\underline{v} \times \underline{B} = \eta \underline{j} + \nabla \Phi \quad (\text{II.2})$$

$$\operatorname{div} \underline{j} = 0 \quad (\text{II.3})$$

$$\operatorname{div} \varrho \underline{v} = Q \quad (\text{II.4})$$

Q ist hier etwas anders definiert als in (I.19). ϱ ist die Massendichte und c_s die Schallgeschwindigkeit. Terme, die μ , η und Q enthalten, sind dann klein, wenn man

$$\frac{\tau}{T}, \quad \left(\frac{m_i}{m_e}\right)^{1/2} \beta \cdot \frac{T}{\tau} \cdot \frac{c^2}{L^2 \omega_p^2} \ll 1 \quad (\text{II.5})$$

voraussetzen kann. τ ist die Elektronen-Ionen-Stoßzeit, T die Zeit, die das Plasma zum Durchströmen einer makroskopischen Änderungs-länge L benötigt, c die Lichtgeschwindigkeit und ω_p die Plasmafrequenz. Einer Entwicklung nach diesen beiden dimensionslosen Parametern entspricht formal die Entwicklung der dimensionsbehafteten Gleichungen nach μ , η und Q , wobei Q und η die gleiche Ordnung zukommt. Wir führen sie durch für den Fall, in dem sich ein Plasma in einem axialsymmetrischen, meridionalen Magnetfeld befindet.

*) Die Annahme eines isothermen Plasmas ist nicht unbedingt erforderlich und vereinfacht nur die Rechnung. Für jede Beziehung der Form $p = p(\varrho, \psi)$, wobei ψ die magnetischen Flächen ordnet, sind die Gleichungen in der hier beschriebenen Weise lösbar. Den Hinweis auf diese für Anwendungen nicht unwesentliche mögliche Verallgemeinerung verdanke ich Herrn Prof. Schlüter.

2. Das Lösungsverfahren

Um etwas Bestimmtes vor Augen zu haben, denken wir etwa an die Octopolkonfiguration [11], in der das Magnetfeld von einem System coaxialer Ringleiter erzeugt wird. Eine schematische Darstellung des Feldlinienbildes in einer Meridianebene ist in Abb.3 gegeben.

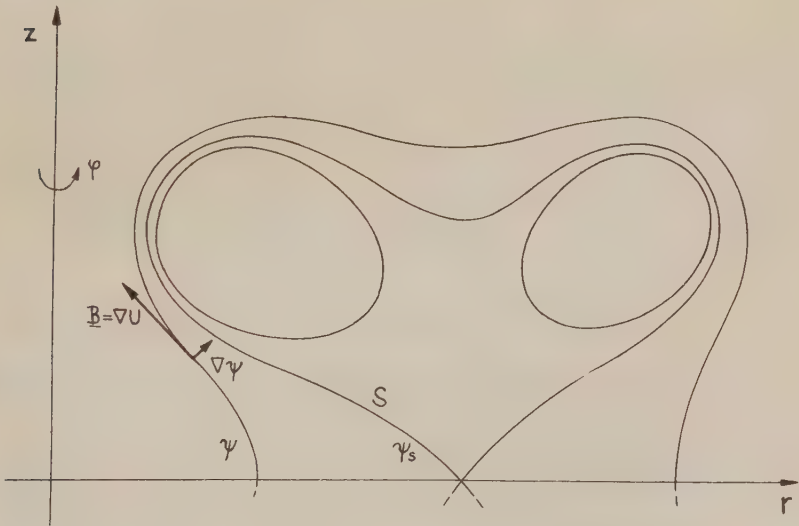


Abb.3 : Schematische Darstellung des Octopol-Feldes [11], das um die z-Achse und zur Ebene $z=0$ symmetrisch ist.

Anstelle des Querflusses $G(x)$ haben wir hier die Einführung des magnetischen Flusses $2\pi\psi(x)$ vorgezogen, der durch eine Fläche tritt, die von einem zur Symmetrieachse konzentrischen Kreise durch $x = (x, y, z)$ berandet wird. ψ steht mit G in der Beziehung

$$G(x) = -2\pi(\psi(x) - \psi_s)$$

Mit U als dem magnetischen Potential und mit φ als dem Winkel um die Symmetrieachse gilt dann für die Klasse von Magnetfeldern, für die wir uns interessieren

$$\underline{B} = \nabla U = \nabla \psi \times \nabla \varphi \quad (\text{II.6})$$

Obgleich wir nur die nullte und erste Ordnung bezüglich einer Entwicklung nach den beiden Parametern (II.5) wirklich berechnen werden, zeigen wir, wie ganz allgemein aus einer Lösung des Systems (II.1) bis (II.4) in irgendeiner Ordnung die in nächst höherer Ordnung durch eine gewöhnliche Integration gewonnen werden kann. Zu diesem Zweck besprechen wir zunächst, wie man auf die folgende Form des zu lösenden Gleichungssystems kommt:

$$\underline{B} \cdot \nabla \Phi = -\eta \underline{j} \cdot \underline{B} \quad (\text{II.7})$$

$$\underline{v}_\perp = \frac{\underline{B} \times \nabla \Phi}{B^2} - \eta \frac{\underline{j} \times \underline{B}}{B^2} \quad (\text{II.8})$$

$$\underline{B} \cdot \nabla \rho \frac{\underline{v} \cdot \underline{B}}{B^2} = \eta \operatorname{div} \rho \frac{\underline{j} \times \underline{B}}{B^2} + Q \quad (\text{II.9})$$

$$\underline{B} \cdot \nabla (v_\parallel^2 - v_\perp^2 + 4c_s^2 \ln \rho) = 2\eta \left\{ \operatorname{div} (\underline{v} \underline{B} \frac{\underline{j} \times \underline{B}}{B^2}) - \underline{v} \cdot \operatorname{rot} \underline{j} \right\} + \frac{2\mu}{\rho} \underline{B} \cdot \underline{v} \quad (\text{II.10})$$

$$\underline{j}_\perp = \frac{\underline{B}}{B^2} \times (\rho \underline{v} \cdot \nabla \underline{v} + 2c_s^2 \nabla \rho - \mu \underline{v}) \quad (\text{II.11})$$

$$\underline{B} \cdot \nabla \left\{ \frac{1}{B^2} (\underline{j} \cdot \underline{B} - \underline{B} \cdot \operatorname{rot} \frac{\underline{v} \cdot \underline{B}}{B^2} \underline{v}) \right\} = \quad (\text{II.12})$$

$$= -\underline{B} \cdot \operatorname{rot} \frac{1}{B^2} \left\{ (\eta \operatorname{div} \frac{\rho}{B^2} (\underline{j} \times \underline{B}) + Q) \underline{v} + \eta \frac{\rho}{B^2} \operatorname{div} (\underline{v} \times \underline{B}) \underline{j} + \mu \underline{v} \right\}$$

wobei

$$\underline{V} := \nabla^2 \underline{V} + \frac{1}{3} \nabla \operatorname{div} \underline{V} \quad (\text{II.13})$$

gesetzt wurde. (II.7) und (II.8) stellen das Ohmsche Gesetz parallel und senkrecht zum Feld $\underline{B}$ dar. (II.9) ist die nach $\operatorname{div} \rho \underline{V}_{||}$ aufgelöste Kontinuitätsgleichung, auf der rechten Seite wurde für $\underline{V}_{\perp}$ nach (II.8) ersetzt; der $\nabla \Phi$ enthaltende Term verschwindet, weil $\underline{B} \times \nabla \Phi$ wegen der axialen Symmetrie ein rein toroidales Vektorfeld ist und die Divergenz jedes skalaren (vom Winkel um die Symmetrieachse unabhängigen) Vielfachen eines solchen Feldes verschwindet. Davon wird noch öfters Gebrauch gemacht werden. Die Gleichung (II.10) ergibt sich nach näherer Untersuchung der innerlich mit $\underline{B}$ multiplizierten und durch ρ geteilten Bewegungsgleichung: Es ist

$$\begin{aligned} \underline{B} \cdot (\underline{V} \cdot \nabla \underline{V}) &= \underline{B} \cdot \left(\frac{1}{2} \nabla V^2 - \underline{V} \times \operatorname{rot} \underline{V} \right) \\ &= \frac{1}{2} \underline{B} \cdot \nabla V^2 + \operatorname{div} \{ \underline{V} \times (\underline{V} \times \underline{B}) \} + \underline{V} \cdot \operatorname{rot} (\underline{V} \times \underline{B}) \quad (\text{II.14}) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \underline{B} \cdot \nabla (V_{||}^2 - V_{\perp}^2) + \operatorname{div} \underline{V} \cdot \underline{B} \underline{V}_{\perp} + \eta \underline{V} \cdot \operatorname{rot} \underline{f} \quad (\text{II.15})$$

Die letzte Zeile folgt aus der zweiten, indem dort im zweiten Term das Kreuzprodukt ausgewertet und für den dritten Term das Ohmsche Gesetz herangezogen wird. Zusammen mit der Bewegungsgleichung erklärt dies (II.10). (II.11) ist die Aussage, die die Bewegungsgleichung senkrecht zum Feld macht, wir verwenden sie in der Kontinuitätsgleichung für den Strom, um nach einigen vektoranalytischen Umformungen durch Auflösung nach $\operatorname{div} \underline{j}_{||}$ schließlich die Beziehung (II.12) zu finden.

Diese Form der hydromagnetischen Gleichungen zeigt, wie man aus einer Lösung gegebener Ordnung direkt die in nächst höherer Ordnung gewinnen kann:

Angenommen, die Lösung einschließlich (n-1)-ter Ordnung liegt bereits vor. Durch Integration längs einer Feldlinie erhält man aus den magnetischen Differentialgleichungen (II.7), (II.9), (II.10) und (II.12) die vier hinter den Gradientensymbolen stehenden Funktionen der Ordnung n in Abhängigkeit von den nach

Voraussetzung bekannten Lösungen niedrigerer Ordnung bis auf vier vorläufig willkürliche Flächengrößen. Nach Maßgabe dieser Flächengrößen lassen sich dann mit Hilfe der restlichen (algebraischen) Gleichungen $\phi^{(n)}$, $\rho^{(n)}$, $\underline{v}^{(n)}$ und $\underline{j}^{(n)}$ bestimmen: $\phi^{(n)}$ aus der Lösung von (II.7), $\underline{v}_\perp^{(n)}$ aus (II.8); aus den Lösungen von (II.9,10) nach Eintragung von $\underline{v}_\perp^{(n)}$ anschließend $\rho^{(n)}$ und $\underline{v}_\parallel^{(n)}$, schließlich folgt $\underline{j}^{(n)}$, nachdem man von $\rho^{(n)}$ und $\underline{v}^{(n)}$ in (II.11) und in der Lösung von (II-12) Gebrauch gemacht hat. Um der Übersicht wegen etwas zu formalisieren, bezeichnen wir mit f die Spalte jener vier Funktionen, auf die in den magnetischen Differentialgleichungen $\underline{B} \cdot \nabla$ angewendet wird. Führt man als Koordinaten das magnetische Potential U , den Fluß ψ und den Winkel φ ein, dann entspricht der Operation $\underline{B} \cdot \nabla$ die Anwendung von $B^2 \partial / \partial U$, was bedeutet, daß in n -ter Ordnung die Gleichungen

$$\frac{\partial f^{(n)}}{\partial U} = R^{(n)}(U, \psi) \quad (\text{II.16})$$

bei bekannten rechten Seiten zu lösen sind. In integrierter Form

$$f^{(n)}(U, \psi) = \int_{U_0}^U R^{(n)}(U', \psi) dU' + S^{(n)}(\psi) \quad (\text{II.17})$$

enthalten sie die genannten Flächengrößen $S^{(n)}(\psi) := f^{(n)}(U_0, \psi)$. Über die physikalischen Größen, von denen wir gesehen haben, wie sie aus den $f^{(n)}$ zu berechnen sind, gehen die $S^{(n)}$ in die rechten Seiten der $(n+1)$ -ten Ordnung auf die folgende Weise ein

$$\frac{\partial f^{(n+1)}}{\partial U} = R^{(n+1)}\left(U, \psi, S^{(n)}, \frac{dS^{(n)}}{d\psi}, \frac{d^2 S^{(n)}}{d\psi^2}, \frac{d^3 S^{(n)}}{d\psi^3}\right) \quad (\text{II.18})$$

Dabei haben wir S_1 als unbestimmtes Integral über ein $\tilde{S}_1(\psi)$ aufgefaßt und die Tilde dann wieder weggelassen. Damit tragen wir dem Umstand Rechnung, daß auch in einer exakten Lösung das elektrische Potential nur bis auf eine additive Konstante bestimmt ist. Wie die $R^{(n+1)}$ von ihren Variablen abhängen, ist bekannt.

Wir bezeichnen mit ΔU den Zuwachs des magnetischen Potentials bei einem Feldlinienumlauf und setzen für eine Funktion g

$$\langle q \rangle = \frac{1}{\Delta u} \int_0^{\Delta u} q \, du \quad (\text{II.19})$$

Da Verwechslungen nicht zu befürchten sind, führen wir diesen Mittelwert, bei dem anders als in (I.46) gewichtet wird, unter gleicher Bezeichnung.

Für die von den $r^{(n+1)}$ beschriebenen physikalischen Größen erhält man nur dann räumlich eindeutige Lösungen, wenn für jedes n die $S^{(n)}$ mit

$$\langle R^{(n+1)} \rangle(\psi, S^{(n)}, \frac{dS^{(n)}}{d\psi}, \frac{d^2 S^{(n)}}{d\psi^2}, \frac{d^3 S^{(n)}}{d\psi^3}) = 0 \quad (\text{II.20})$$

verträglich gewählt werden können. Eine dritte Ableitung der Flächengrößen erscheint dabei nur auf der rechten Seite der letzten Gleichung des Systems (II.18) und zwar als Folge einer partiellen Ableitung nach ψ , die von einer Funktion gebildet wird, die die $S^{(n)}$ nur bis zur einschließlich zweiten Ableitung enthält. (Man vergleiche dazu (II.12); die zu $\underline{B}$ parallele Komponente der Rotationsbildung entspricht einem $B^2 \partial/\partial\psi$.) Effektiv hat man es also mit vier Bedingungen der Form

$$\Omega^{(n+1)}(i, \psi, S^{(n)}, \frac{dS^{(n)}}{d\psi}, \frac{d^2 S^{(n)}}{d\psi^2}) = 0 \quad (\text{II.21})$$

zu tun. Sie enthalten eine zusätzliche Konstante, deren Bedeutung wir noch klären werden. Falls die Bedingungen (II.21), aufgefaßt als vier Differentialgleichungen für die vier Flächengrößen $S^{(n)}$, geeignet sind, zusammen mit Randbedingungen die Funktionen $S^{(n)}(\psi)$ zu bestimmen, haben wir ein iteratives Verfahren zur Bestimmung des stationären Gleichgewichtes Ordnung um Ordnung.

3. Interpretation der Lösbarkeitsbedingungen

Für ein vertieftes Verständnis der Lösbarkeitsbedingungen betrachten wir zuerst die beiden Gleichungen (II.7) und (II.12). Die in der integrierten Form von (II.12) in gegebener Ordnung enthaltene additive Flächengröße tritt in der nächst höheren Ordnung mit $-\eta$ multipliziert als Term der zu (II.7) gehörigen Lösbarkeitsbedingung auf und läßt sich deshalb durch die restlichen drei Flächengrößen und deren Ableitungen ausdrücken. Aus diesem Grunde können wir uns darauf beschränken, die Bedeutung der mit den Gleichungen (II.9), (II.10) und (II.12) verbundenen Konsistenzrelationen zu untersuchen.

Zu irgendeinem Zeitpunkt t der stationären Plasmaströmung grenzen wir im Plasma einen Volumenbereich G ab, der vom Flußintervall $[\psi_0, \psi]$ in räumlicher Fortsetzung längs Feldlinien und durch Rotation um die z -Achse erzeugt wird. Die zum Zeitpunkt t in G befindliche Materie definiert mit ihren zu früheren und späteren Zeiten t' eingenommenen Raumbereichen ein zeitabhängiges Gebiet $G(t')$, so daß $G(t) = G$ gilt. Unter $C(t')$ wollen wir eine materiell verheftet gedachte, geschlossene Raumkurve verstehen, die für $t' = t$ eine Feldlinie bildet. Bezüglich $G(t')$ und $C(t')$ sind Masse M des Plasmas, Zirkulation Z des Geschwindigkeitsfeldes $\underline{v}$ und z -Komponente des Gesamtdrehimpulses D um die z -Achse wie folgt definiert:

$$M := \int_{G(t')} \rho \, d^3x \quad (\text{II.22})$$

$$Z := \oint_{C(t')} \underline{v} \cdot d\underline{x} \quad (\text{II.23})$$

$$D := \int_{G(t')} \underline{e}_z \cdot (\underline{x} \times \rho \underline{v}) \, d^3x \quad (\text{II.24})$$

Vermöge der Gleichungen (II.4) und (II.1) wird den Zeitableitungen dieser Größen zum Zeitpunkt $t' = t$ in der Form folgender Bilanzgleichungen das Gleichgewicht gehalten

$$\dot{M}(t) \equiv \int_G \operatorname{div}(\rho \underline{v}) d^3x = \int_G Q d^3x \quad (\text{II.25})$$

$$\dot{Z}(t) \equiv \oint (\operatorname{rot} \underline{v} \times \underline{v}) \cdot d\underline{x} = \oint \frac{\mu}{\rho} \underline{v} \cdot d\underline{x} \quad (\text{II.26})$$

$$\begin{aligned} \dot{D}(t) &\equiv \int_G \underline{e}_z \cdot \{ \underline{x} \times (\rho \underline{v} \cdot \nabla \underline{v} + \underline{v} \operatorname{div} \rho \underline{v}) \} d^3x \\ &= \int_G \underline{e}_z \cdot \{ \underline{x} \times (\underline{j} \times \underline{B} - 2c_s^2 \nabla \rho + \mu \underline{v} + Q \underline{v}) \} d^3x \end{aligned} \quad (\text{II.27})$$

$\underline{e}_z$ ist der Einheitsvektor in z-Richtung. Schreiben wir die zur Diskussion stehenden Lösbarkeitsbedingungen auf und halten sie gegen die näher ausgewerteten letzten drei Gleichungen, dann erkennen wir die ersteren in folgender Gestalt der gerade hergeleiteten Bilanzgleichungen wieder:

$$\frac{1}{2\pi\Delta u} \frac{dM}{d\psi} \equiv -\eta \left\langle \frac{1}{B^2} \operatorname{div} \rho \frac{\underline{j} \times \underline{B}}{B^2} \right\rangle = \left\langle \frac{1}{B^2} Q \right\rangle \quad (\text{II.28})$$

$$\frac{1}{\Delta u} \dot{Z} \equiv \eta \left\{ \left\langle \frac{1}{B^2} \underline{v} \operatorname{rot} \underline{j} \right\rangle - \left\langle \frac{1}{B^2} \operatorname{div} \underline{v} \underline{B} \frac{\underline{j} \times \underline{B}}{B^2} \right\rangle \right\} = \left\langle \frac{\mu}{\rho B^2} \underline{B} \cdot \underline{v} \right\rangle \quad (\text{II.29})$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi\Delta u} \frac{d\dot{D}}{d\psi} &\equiv -\eta \left\langle \frac{r^2}{B^2} \left\{ \underline{v} \operatorname{div} \frac{\rho}{B^2} (\underline{j} \times \underline{B}) + \frac{\rho}{B^2} \underline{j} \operatorname{div} (\underline{v} \times \underline{B}) \right\} \cdot \nabla \varphi \right\rangle \\ &= \frac{1}{2\pi\Delta u} i + \left\langle \frac{r^2}{B^2} (\mu \underline{v} + Q \underline{v}) \cdot \nabla \varphi \right\rangle \end{aligned} \quad (\text{II.30})$$

Dabei wurde in den $\dot{M}$, $\dot{Z}$ und $\dot{D}$ erklärenden Ausdrücken das Geschwindigkeitsfeld durch Größen niedrigerer Ordnung beschrieben.

Mit r haben wir den als Funktion von U und ψ verstandenen Abstand von der Symmetrieachse bezeichnet. i ist der durch die Flächen $\psi(x) = \psi$ nach außen fließende Nettostrom.

$$i = - \int_{\psi(x)=\psi} \vec{j} \cdot \nabla \psi \frac{dS}{|\nabla \psi|} = -2\pi \Delta u \left\langle \frac{1}{B^2} \vec{j} \cdot \nabla \psi \right\rangle \quad (\text{II.31})$$

Er tritt im Zusammenhang mit dem die Stromdichte enthaltenden Term auf der rechten Seite von (II.27) auf. Wegen

$$\underline{e}_z \times \underline{x} = r \underline{e}_\varphi = r^2 \nabla \varphi \quad (\text{II.32})$$

und (II.6) ist nämlich

$$\frac{d}{d\psi} \int_{\psi_0 \leq \psi(x) \leq \psi} \underline{e}_z \cdot \{ \underline{x} \times (\vec{j} \times \underline{B}) \} d^3x = \int_{\psi(x)=\psi} r^2 \nabla \varphi \cdot (\vec{j} \times \underline{B}) \frac{dS}{|\nabla \psi|} = i \quad (\text{II.33})$$

Die Integralform der Kontinuitätsgleichung für die im Raum eindeutige Stromdichte fordert, daß i Konstante ist und da sich die Lösbarkeitsbedingung zu (II.12) gerade so interpretieren läßt, ist deren Äquivalenz mit der Bilanzgleichung (II.30) nur natürlich.

4. Die Lösung in niedrigster Ordnung und die Bestimmung der Teilchenverluste

Obgleich alle bisher aus den Ausgangsgleichungen abgeleiteten Beziehungen im Rahmen des betrachteten Modells streng gelten, versteht es sich, daß die implizite Form, in der wir sie präsentiert haben, sinnvoll und nützlich nur in bezug auf das besprochene näherungsweise Lösungsverfahren ist.

Für eine eingehendere Untersuchung der Gleichungen in nullter und erster Ordnung wählt man zweckmäßigerweise ein der Feldliniengeometrie möglichst gut angepaßtes Koordinatensystem. Im Hinblick auf die Gleichung (II.6) bietet sich an, die kartesi-

schen Koordinaten $x = (x, y, z)$ auf die Größen U, ψ und φ zu beziehen: $x = X(U, \psi, \varphi)$. Für die Metrik und für das Volumenelement erhält man

$$ds^2 = \frac{1}{B^2} dU^2 + \frac{1}{r^2 B^2} d\psi^2 + r^2 d\varphi^2 \quad (\text{II.34})$$

$$\sqrt{g} = \frac{1}{B^2} \quad (\text{II.35})$$

Für ein Vektorfeld $\underline{A}$ verwenden wir die Darstellungen (I.34) und die Koordinaten (I.35), wobei hier α die Zeichen U, ψ und φ durchläuft; die angeschriebene Reihenfolge definiert die Orientierung.

Die Lösung in nullter Ordnung, die man den passend umgewandelten Ausgangsgleichungen (II.7) bis (II.12) direkt ablesen kann, lautet

$$\Phi^{(0)} = \int_{\psi_0}^{\psi} S_1^{(0)}(\psi') d\psi' \quad (\text{II.36})$$

$$\underline{V}_1^{(0)} = \frac{1}{B^2} \underline{B} \times \nabla \Phi^{(0)} = \frac{S_1^{(0)}(\psi)}{B^2} \underline{B} \times \nabla \psi \quad (\text{II.37})$$

$$\varrho^{(0)} \underline{V}_\parallel^{(0)} = S_2^{(0)}(\psi) \underline{B} \quad (\text{II.38})$$

$$(\underline{V}_\parallel^{(0)})^2 - (S_1^{(0)})^2 \frac{|\nabla \psi|^2}{B^2} + 4c_s^2 \ln \varrho^{(0)} = S_3^{(0)}(\psi) \quad (\text{II.39})$$

$$\underline{j}_\perp^{(0)} = \frac{1}{B^2} \underline{B} \times \left\{ (\varrho \underline{V} \cdot \nabla \underline{V})^{(0)} + 2c_s^2 \nabla \varrho^{(0)} \right\} \quad (\text{II.40})$$

$$\underline{j}_\parallel^{(0)} = \frac{1}{B^2} \underline{B} \cdot \text{rot} \left[\left(\varrho \frac{\underline{V} \cdot \underline{B}}{B^2} \right)^{(0)} \underline{V} \right] \underline{B} + S_4^{(0)} \underline{B} \quad (\text{II.41})$$

Das Lagrangesche Variationsprinzip für ideale hydromagnetische Strömungen von Greene und Karlson [7] verlangt für die Festlegung einer Lösung die Spezifizierung der Längs- und Querflüsse (F, G bzw. L, N) von $\underline{B}$ und $\varrho \underline{V}$ innerhalb jeder der Flächen $\Phi^{(0)} = \text{const.}$ und die Vorgabe etwa der Temperatur als Funktion von $\Phi^{(0)}$.

Hinzu kommt in der Näherung kleinen β 's eine weitere Flächen-
größe, die damit zusammenhängt, daß man - wie ein Blick auf die
Gleichungen beim Fehlen von Dissipation lehrt - aus jeder Lösung
durch Hinzufügen einer beliebigen divergenzfreien Parallelstrom-
dichte eine weitere produzieren kann. Explizit findet dies sei-
nen Ausdruck in der Willkür der Wahl für $S_4^{(0)}$.

Im übrigen ist der Bestimmtheitsgrad des Lösungssystems (II.36)
bis (II.41) in voller Übereinstimmung mit der von Greene und
Karlson vermuteten Sachlage: die (überall als konstant voraus-
gesetzte) Temperatur bestimmt c_s , über den Längsfluß von $\underline{B}$ ha-
ben wir durch die Wahl des Magnetfeldtyps verfügt und eine Vor-
schrift über $\psi(\Phi^{(0)})$ fixiert die Funktion $S_1^{(0)}$; schließlich kann
man sich davon überzeugen, daß sich aus $L(\Phi^{(0)})$ und $N(\Phi^{(0)})$ $S_2^{(0)}(\psi)$
und $S_3^{(0)}(\psi)$ berechnen lassen.

Wir untersuchen jetzt, welche Einschränkungen die Berücksich-
tigung von elektrischem Widerstand und von Viskosität der Lö-
sung in nullter Ordnung dadurch auferlegt, daß wir die Existenz
der diese Effekte beschreibenden Lösung in erster Ordnung im
Großen fordern. Die Eindeutigkeit des elektrischen Potentials
benützen wir, um $S_4^{(0)}$ zu eliminieren. Integrieren wir die durch
 B^2 geteilte Gleichung (II.7) in erster Ordnung ganz über U , dann
muß

$$\left\langle \frac{1}{B^2} \hat{j}^{(0)} \cdot \underline{B} \right\rangle = 0 \quad (\text{II.42})$$

sein. Dies legt $S_4^{(0)}$ nach Angabe der drei anderen Parameter fest
und damit im gleichen Sinne auch $j_4^{(0)}$

$$\hat{j}_\parallel^{(0)} = \left\{ \frac{1}{B^2} \underline{B} \cdot \text{rot} \left(\rho \frac{\underline{v} \cdot \underline{B}}{B^2} \right)^{(0)} \underline{v}^{(0)} - \left\langle \frac{1}{B^2} \underline{B} \cdot \text{rot} \left(\rho \frac{\underline{v} \cdot \underline{B}}{B^2} \right)^{(0)} \underline{v}^{(0)} \right\rangle \underline{B} \right\} \quad (\text{II.43})$$

Die Beziehungen (II.28) bis (II.30) haben wir als Bestimmungsglei-
chungen für $(S_1^{(0)}, S_2^{(0)}, S_3^{(0)}) =: S^{(0)}$ anzusehen. Wir lassen die Ordnungs-
bezeichnung bei Größen nullter Ordnung von jetzt ab weg, berech-
nen die von $\underline{v}$ ($= \underline{v}^{(0)}$) benötigten Komponenten

$$V_u = \frac{4}{3} (B^2 V_{u|u})_{|u} + (r^2 B^2 V_{u|v})_{|v} \quad (\text{II.44})$$

$$V_v = r^2 B^2 \left\{ \left(\frac{1}{r^2} V_{v|u} \right)_{|u} + V_{v|v|v} \right\} \quad (\text{II.45})$$

und erhalten aus den Bilanzgleichungen für Masse, Zirkulation und Drehimpuls

$$\frac{1}{2\pi\Delta u} \frac{d\dot{M}}{d\psi} \equiv -\eta \frac{d}{d\psi} \left\langle \frac{1}{B^2} \rho j_v \right\rangle = \left\langle \frac{1}{B^2} Q \right\rangle \quad (\text{II.46})$$

$$\frac{1}{\Delta u} \dot{Z} \equiv -\eta \left\langle j_v V_{v|u} + j_{u|v} V_v + j_v V_{u|v} \right\rangle = \left\langle \frac{\mu}{\rho} V_u \right\rangle \quad (\text{II.47})$$

$$\frac{1}{2\pi\Delta u} \frac{d\dot{D}}{d\psi} \equiv -\eta \frac{d}{d\psi} \left\langle \frac{1}{B^2} \rho V_v j_v \right\rangle = \frac{1}{2\pi\Delta u} i + \left\langle \frac{1}{B^2} (\mu V_v + Q V_v) \right\rangle \quad (\text{II.48})$$

Um Gleichungen für die drei Funktionen S zu erhalten, hat man sich die aus (II.38) und (II.39) folgende Beziehung

$$2C_s^2 \ln \rho^2 - S_1^2 r^2 + S_2^2 \frac{B^2}{\rho^2} = S_3 \quad (\text{II.50})$$

als nach ρ aufgelöst und in (II.46) bis (II.48) eingesetzt vorzustellen. Für die anderen Größen ist so zu ersetzen, wie es die Lösung in nullter Ordnung vorschreibt:

$$j_u = \frac{\partial}{\partial \psi} \left\{ S_1 S_2 (r^2 - \langle r^2 \rangle) \right\} \quad (\text{II.51})$$

$$j_v = -\frac{1}{r^2} S_1 S_2 \frac{\partial r^2}{\partial u} \quad (\text{II.52})$$

$$j_v = r^2 \left\{ 2C_s^2 \frac{\partial \rho}{\partial \psi} - \frac{1}{2} \rho S_1^2 \frac{\partial r^2}{\partial \psi} + \frac{1}{2\rho} S_2^2 \frac{\partial B^2}{\partial \psi} \right\} \quad (\text{II.53})$$

$$V_u = \frac{1}{\rho} S_2, \quad V_v = r^2 S_1 \quad (\text{II.54})$$

Das resultierende Gleichungssystem wird von folgender Struktur sein

$$\omega_e^k(\psi, S) \frac{d^2 S_k}{d\psi^2} + \omega_e^{km}(\psi, S) \frac{dS_k}{d\psi} \frac{dS_m}{d\psi} + \chi_e^k(\psi, S) \frac{dS_k}{d\psi} = \gamma_e^k(\psi, S) \quad (\text{II.55})$$

(k=1,2,3)

Über k und m (k,m=1,2,3) ist zu summieren und die Koeffizienten sind bekannte Funktionen der angegebenen Variablen.

Wie an den Gleichungen (II.46) bis (II.48) zu sehen ist, wird ein Teil der für die Erfüllbarkeit von Randbedingungen wesentlichen zweiten Ableitungen durch die Viskosität hervorgerufen. Die Plasmaquellen und ein eventuell durch die Flächen $\psi(x) = \psi$ fließender Strom spielen als Größen, die in die rechten Seiten von (II.55) eingehen, die Rolle von Inhomogenitäten. Für $i=0$ und bei lokalisierter Quelle ist zu erwarten, daß man geeignete Randbedingungen nur dann befriedigen kann, wenn sowohl elektrischer Widerstand als auch Viskosität in erster Ordnung auftreten.

Zusammenfassend können wir sagen, daß wir die Bestimmung der mit dissipativen Mechanismen verträglichen Lösung in nullter Ordnung zurückgeführt haben auf die Lösung der drei gewöhnlichen Differentialgleichungen (II.55). Gerade darauf reduziert sich auch die Berechnung der durch die endliche Leitfähigkeit des Plasmas bedingten und durch Viskosität und Trägheit beeinflussten Teilchenverluste in erster Ordnung, denn es ist nach (II.37)

$$W^{(1)} = -\frac{1}{m} \int_{\psi(x)=\psi} (\rho^{(1)} \underline{v} + \rho \underline{v}^{(1)}) \cdot \nabla \psi \frac{dS}{|\nabla \psi|} = -\frac{1}{m} \int_{\psi(x)=\psi} \rho \underline{v}^{(1)} \cdot \nabla \psi \frac{dS}{|\nabla \psi|} \quad (\text{II.56})$$

und $\underline{v}^{(1)}$ erhält man über (II.8) algebraisch aus ρ und $\underline{j}$ in nullter Ordnung, so daß schließlich mit Hilfe von (II.53) der folgende Ausdruck entsteht:

$$W^{(1)} = \eta \frac{2\pi \Delta U}{m} \left\{ C_s^2 \left\langle \frac{r^2}{B^2} \frac{\partial \rho^2}{\partial \psi} \right\rangle - \frac{1}{2} S_1^2 \left\langle \frac{\rho^2 r^2}{B^2} \frac{\partial r^2}{\partial \psi} \right\rangle + \frac{1}{2} S_2^2 \left\langle \frac{r^2}{B^2} \frac{\partial B^2}{\partial \psi} \right\rangle \right\} \quad (\text{II.57})$$

Wir merken noch an, daß die exakte Behandlung des Trägheits-terms bei axialer Symmetrie nicht an rein meridionale Felder gebunden ist. Sie ist zum Beispiel möglich in dem echt toroidalen Magnetfeld, das Pfirsch und Schlüter in der Arbeit [5] verwendet haben.

Literaturverweise

- [1] R. Abraham, J.E. Marsden: "Foundations of Mechanics", W.A. Benjamin, 1967, S.155.
- [2] M.D. Kruskal, R.M. Kulsrud, Phys. Fluids 1, 265 (1958).
- [3] M. Bineau, Phys. Fluids 10 , 1540 (1967).
- [4] John L. Johnson und S. von Goeler, "Classical Diffusion of a Stationary Toroidal Plasma", Princeton Plasma Physics Laboratory MATT-605 (1968).
- [5] D. Pfirsch, A. Schlüter, MPI/PA/7/62 (1962).
- [6] A. Schlüter, International Symposium on Experimental and Theoretical Aspects of Toroidal Confinement, Princeton, N.Y., Juli 1966.
- [7] J.M. Greene and E.T. Karlson, "A Variational Principle for Stationary Magnetohydrodynamic Equilibria", Princeton Plasma Physics Laboratory, MATT-478 (1966).
- [8] Erik T. Karlson "Stationary Equilibrium of a Toroidal Plasma", ARKIV FÖR FYSIK 35 , 44 (1968).
- [9] G. Knorr, Phys. Fluids 8 , 1334 (1965).
- [10] K.S. Viswanathan, Phys. Fluids 11, 1104 (1968).
- [11] D. Eckhardt, G. von Gierke, G. Grieger, MPI-PAE/Pl. 6/65.
- [12] W.A. Newcomb, Phys. Fluids 2, 362 (1959).

Lebenslauf

Am 21. Mai 1936 wurde ich, Hans-Peter Zehrfeld, als Sohn des kaufmännischen Angestellten Johannes Zehrfeld und seiner Frau Erna in Leipzig geboren.

Von 1942 bis 1950 besuchte ich in Neudietendorf in Thüringen die Volksschule und von 1950 bis 1954 die Lessing-Oberschule in Erfurt.

Nach Ablegung der Reifeprüfung arbeitete ich ein Jahr im Entwicklungslabor des Funkwerkes Erfurt.

Im November 1955 übersiedelte ich aus der DDR nach Westberlin. Nachdem ich dort das Ergänzungsabitur bestanden hatte, begann ich Anfang 1957 an der Universität in München Physik zu studieren. Im Sommer 1964 legte ich die Diplomprüfung ab.

Anschließend war ich Stipendiat am Max-Planck-Institut für Physik und Astrophysik in München. Seit 1965 bin ich im Institut für Plasmaphysik in Garching als wissenschaftlicher Angestellter auf dem Gebiet der theoretischen Plasmaphysik tätig.

